微积分初步

从极限到多元微积分

第二版

郭强

2026 年 10 月修订稿

目录

第二版前言 i

第一版前言 iii

阅读说明与记号 v

绪论 1

第一章 函数与极限 5

1.1 预备知识 5
1.2 数列的极限 22
1.3 函数的极限 30
1.4 无穷小与无穷大 35
1.5 函数极限的运算法则与存在准则 37
1.6 两个重要极限 43
1.7 无穷小的比较 47
1.8 函数的连续性 51
1.9 闭区间上连续函数的性质 55

第二章 导数与微分 60

2.1 导数的概念 60
2.2 基本初等函数的导数与求导法则 66
2.3 高阶导数 75
2.4 隐函数的导数 80
2.5 参数方程所确定函数的导数 85
2.6 微分及其应用 89

第三章 微分中值定理与导数的应用 96

3.1 微分中值定理 96
3.2 洛必达法则 103
3.3 泰勒公式 109
3.4 函数的单调性与曲线的凹凸性 114
3.5 函数的极值与最值 120

3.6 函数图形的描绘 128

第四章 不定积分 **135**

4.1 原函数与不定积分 135
4.2 第一类换元积分法 139
4.3 第二类换元积分法 144
4.4 分部积分法 147
4.5 有理函数与可有理化函数的积分 151

第五章 定积分 **155**

5.1 定积分的概念与性质 155
5.2 积分上限函数与微积分基本定理 161
5.3 定积分的换元法与分部积分法 166
5.4 反常积分 171

第六章 定积分的应用 **177**

6.1 元素法 177
6.2 平面图形的面积 178
6.3 体积 180
6.4 平面曲线的弧长与曲率 182
6.5 定积分在物理学中的应用 187

第七章 微分方程 **190**

7.1 微分方程的基本概念 190
7.2 可分离变量的微分方程 194
7.3 齐次微分方程 198
7.4 一阶线性微分方程 199
7.5 微分方程的应用 204

第八章 多元函数微分法及其应用 **206**

8.1 空间坐标与多元函数 206
8.2 多元函数的极限与连续性 209
8.3 偏导数与高阶偏导数 212
8.4 全微分 216
8.5 多元复合函数的求导法则 220
8.6 隐函数的求导法则 222
8.7 方向导数与梯度 225

8.8 极值与条件极值 226

第九章 二重积分 **233**

9.1 二重积分的概念与性质 233
9.2 直角坐标下二重积分的计算 242
9.3 积分次序的交换 247
9.4 极坐标变换与线性变换 249
9.5 二重积分的应用 256

第十章 数学实验 **261**

10.1 实验规范与要求 261
10.2 MATLAB 与 MWORKS 介绍 261
10.3 实验操作 263
10.4 实验样例 265

符号与术语索引 **273**

参考文献 **277**

第二章　导数与微分

导数描述一个变量对另一个变量的瞬时变化率，微分描述函数增量的线性主部. 本章从极限定义建立运算法则，逐步处理复合、反函数、隐式与参数表示，并为下一章研究函数的整体性质作准备.

2.1　导数的概念

函数的变化可以用增量之比来描述，而当自变量的增量趋于零时，这一比值的极限刻画了函数在一点的变化率. 本节从平均变化率与切线问题出发引入导数，讨论单侧导数、几何意义以及可导与连续的关系.

2.1.1　平均变化率与切线斜率

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，并在点 x_0 处连续，其图像为曲线 C，$M_0(x_0,f(x_0))$ 是曲线上的一个固定点. 在曲线上另取一点

$$M(x_0+\Delta x,\ f(x_0+\Delta x)),$$

其中 $\Delta x\neq 0$. 连接 M_0 与 M 的直线称为曲线的**割线**. 割线的斜率为

$$k_M=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{2.1}$$

当自变量从 x_0 改变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数值的改变量为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

因此，式 (2.1) 表示函数在区间 $[x_0,x_0+\Delta x]$ 或 $[x_0+\Delta x,x_0]$ 上的平均变化率.

若让 Δx 趋于 0，点 M 沿曲线趋于 M_0. 如果差商

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在且为有限实数

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

则以 k 为斜率且经过点 M_0 的直线

$$y-f(x_0)=k(x-x_0)$$

称为曲线在点 M_0 处的**切线**，并称 k 为该切线的**斜率**. 这一定义以差商的极限为依据，而不是用切线与曲线公共点的个数判断切线.

上述定义给出的是具有有限斜率的切线. 若 f 在 x_0 处连续，并且在 x_0 的某个去心邻域内有 $f(x)-f(x_0)\neq 0$，同时

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=0,$$

则差商 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 的绝对值趋于正无穷，割线的极限位置为竖直直线 $x=x_0$. 满足这一条件时，称该直线为曲线在点 M_0 处的**竖直切线**. 竖直切线不存在有限的斜率，因此不能写成 $y-f(x_0)=k(x-x_0)$ 的形式.

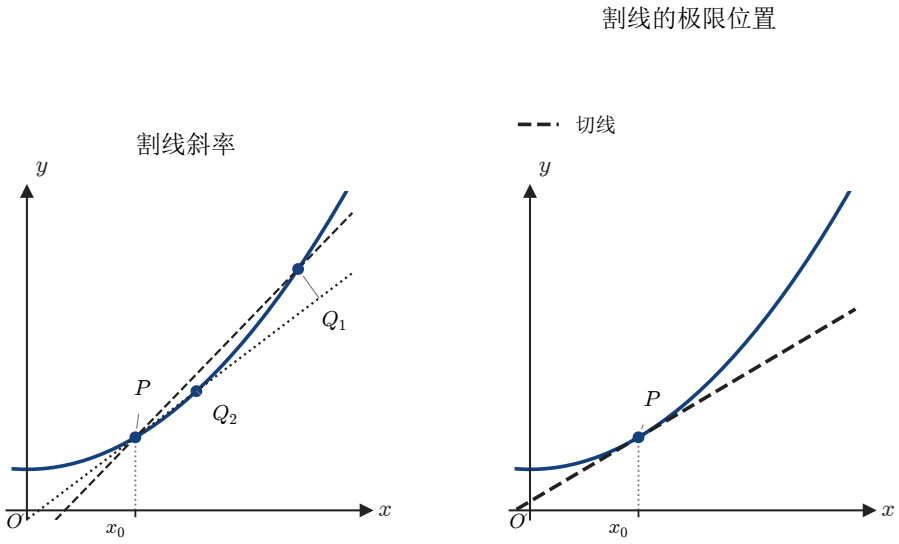


图 2.1: 割线上另一点趋近切点时的割线与极限位置

图 2.1 给出了割线趋近切线的过程. 左图中两条割线对应不同的自变量增量，右图给出差商极限所确定的切线. 切线与曲线的公共点数目一般不能用来判断它是否为切线，切线也不要求曲线始终位于其一侧.

2.1.2 平均速度与瞬时速度

设质点沿直线运动，其位置 s 与时间 t 的函数关系为

$$s=s(t).$$

从时刻 t_0 到 $t_0+\Delta t$，质点的位置增量（位移）为

$$\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0).$$

在这段时间内的平均速度为

$$\overline{v}(\Delta t)=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}.$$

平均速度描述的是整段时间内位置变化的平均快慢，不能单独说明质点在时刻 t_0 的瞬时状态. 若令 $\Delta t\to 0$ 时平均速度的极限存在且为有限实数，则称该极限为质点在时刻

t_0 的**瞬时速度**，即

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

切线斜率和瞬时速度来自不同的背景，但其数学形式相同：先计算函数增量与自变量增量之比，再考察自变量增量趋于零时该比值的极限. 导数正是对这类局部变化率的统一表述.

2.1.3　导数的定义

定义 2.1 (一点处的导数) 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义. 令自变量改变量 $\Delta x\neq 0$，并使 $x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内. 记

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{2.2}$$

存在且为有限实数，则称函数 f 在点 x_0 处**可导**，该极限称为 f 在点 x_0 处的**导数**，记作

$$f'(x_0),\qquad y'\Big|_{x=x_0},\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0}.$$

若该极限不存在，或该极限为无穷大，则称 f 在点 x_0 处**不可导**. □

在定义 2.1 中，比值

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

称为函数 f 在 x_0 附近的**平均变化率**. 导数则是平均变化率当自变量增量趋于零时的极限，因此也称为**瞬时变化率**.Δx 可以取正值，也可以取负值，但必须满足 $\Delta x\neq 0$.

若令 $x=x_0+\Delta x$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，$x\to x_0$，并且 $\Delta x=x-x_0$. 于是导数定义也可以写成

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{2.3}$$

在讨论具体极限时，式 (2.3) 中的 x 只在 x_0 的去心邻域内取值，因此不涉及 $x=x_0$ 时的分式. 该形式往往便于消去差式中的共同因子.

例 2.1 用定义求函数 $f(x)=x^2$ 在点 x_0 处的导数.

解　函数增量为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2.$$

因此

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x_0+\Delta x.$$

令 $\Delta x\to 0$，得

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0.$$

由此可见，函数 x^2 的图像在点 (x_0, x_0^2) 处的切线斜率为 $2x_0$. □

2.1.4 导函数

若函数 f 在区间 I 内的每一点处都可导，则对每一个 $x \in I$，导数 $f'(x)$ 都有确定的值与之对应. 于是得到一个定义在 I 上的新函数 f'. 这个新函数称为 f 的**导函数**，简称导数.

定义 2.2 (区间上的导函数) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 内有定义. 若 f 在 I 内每一点处都可导，则称 f 在 I 内可导，并称由

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \qquad x \in I \tag{2.4}$$

确定的函数 f' 为 f 在 I 上的**导函数**. □

导函数 f' 在点 x_0 处的值就是函数在该点的导数，即

$$f'(x_0) = f'(x)\Big|_{x=x_0}.$$

由此以后，凡称函数在给定区间上的导数，均指区间上的导函数；凡讨论某一点处的导数，则指该点处由极限 (2.2) 给出的数值.

2.1.5 左导数与右导数

导数定义中的 Δx 可正可负. 处理分段函数在分段点处的可导性时，需要分别考察自变量从左、右两侧趋近的情形.

定义 2.3 (左导数与右导数) 设函数 f 在某个区间 $(x_0 - \eta, x_0]$ 上有定义，其中 $\eta > 0$. 若极限

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在且为有限实数，则称其为 f 在点 x_0 处的**左导数**，记作 $f'_-(x_0)$.

类似地，设函数 f 在某个区间 $[x_0, x_0 + \eta)$ 上有定义. 若极限

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在且为有限实数，则称其为 f 在点 x_0 处的**右导数**，记作 $f'_+(x_0)$. □

定理 2.1 (可导的充要条件) 设函数 f 在点 x_0 的某个邻域内有定义. 则 f 在点 x_0 处可导，当且仅当左导数 $f'_-(x_0)$ 与右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等. 此时

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

证明 若 $f'(x_0)$ 存在，则它是一个有限实数. 由双侧极限存在的必要条件，沿左侧趋近和沿右侧趋近所得极限都存在且都等于 $f'(x_0)$，故左、右导数存在且相等.

反过来，若左、右导数存在且相等，设其共同值为 A. 由左、右导数的定义，A 为有限实数. 对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使当 $-\delta < \Delta x < 0$ 以及 $0 < \Delta x < \delta$ 时，差商与

A 的距离都小于 ε. 因此当 $0<|\Delta x|<\delta$ 时，差商与 A 的距离同样小于 ε，所以双侧极限存在，且等于 A. 这就证明了 f 在 x_0 处可导. □

2.1.6　导数的几何意义

由前面的讨论可知，$f'(x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $M_0(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率. 因此曲线在该点处的切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0). \tag{2.5}$$

若 $f'(x_0)\neq 0$，则法线斜率等于切线斜率的负倒数，曲线在 M_0 处的法线方程为

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0). \tag{2.6}$$

若 $f'(x_0)=0$，切线为水平直线 $y=f(x_0)$，相应的法线为竖直直线 $x=x_0$.

若 f 在 x_0 处可导，则左、右差商趋于同一个有限实数，故两侧割线的极限位置相同，曲线在该点有有限斜率切线. 若左、右差商分别存在有限极限但不相等，并且 f 在 x_0 处连续，则曲线在该点出现角点，此时不存在有限斜率切线. 若函数在该点连续，且差商的绝对值趋于正无穷，则由倒数差商的极限为零可以判定竖直切线；差商本身可以趋于某个有号无穷，也可以正负交替. 所以差商没有有限极限不等于没有切线，必须区别上述情形.

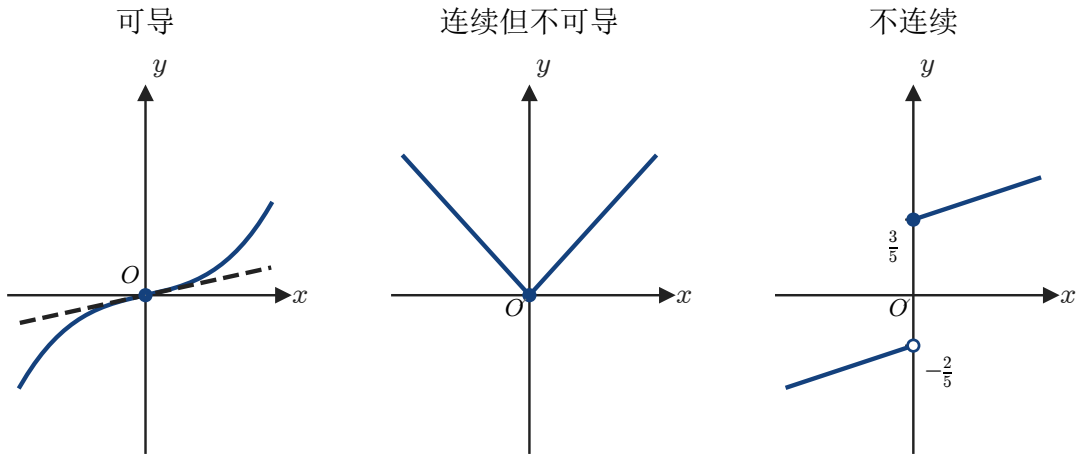


图 2.2: 可导点、尖点与间断点附近的局部形态

图 2.2 左图的曲线在所示点附近有有限斜率切线，中图的绝对值函数在原点出现角点，右图的函数在所示点不连续. 可导性比连续性要求更强：可导函数在该点必须连续，而且差商必须有有限极限.

例 2.2 讨论函数 $f(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解　因为

$$\lim_{x\to 0}|x|=0=f(0),$$

所以 f 在 $x=0$ 处连续.

在 $x=0$ 处，左、右差商分别为

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

左、右导数都存在但不相等，所以 f 在 $x=0$ 处不可导. 这说明连续不一定可导. □

2.1.7 可导与连续的关系

定理 2.2 (可导必连续) 若函数 f 在点 x_0 处可导，则 f 在点 x_0 处连续.

证明 记

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

当 $\Delta x\neq 0$ 时，

$$\Delta y=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x.$$

由于 f 在 x_0 处可导，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0).$$

又 $\Delta x\to 0$，故由极限的乘积法则，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=f'(x_0)\cdot 0=0.$$

即

$$\lim_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0).$$

因此 f 在点 x_0 处连续. □

定理 2.2 的逆命题不成立. 函数 $|x|$ 在 $x=0$ 处连续但不可导，说明连续性只保证函数值随自变量趋于同一点，导数还要求改变量之比趋于一个确定的数.

例 2.3 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解 因为

$$0\le\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|,$$

且当 $x\to 0$ 时 $|x|\to 0$，由夹逼准则得

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0=f(0).$$

所以 f 在 $x=0$ 处连续.

考察差商

$$\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x}.$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，$\sin\dfrac{1}{\Delta x}$ 的值在 -1 与 1 之间反复振荡. 取 $\Delta x_k=\dfrac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$，则当 $k\to\infty$ 时 $\Delta x_k\to 0$，而差商趋于 1；取 $\Delta x_k=\dfrac{1}{2k\pi-\frac{\pi}{2}}$，则当 $k\to\infty$ 时 $\Delta x_k\to 0$，而差商趋于 -1. 两个趋于 0 的数列给出不同的差商极限，因此差商不存在极限，f 在 $x=0$ 处不可导. □

注 可导与连续的关系可表述为：可导必定连续，连续未必可导. 函数在某点不可导，可能是因为该点两侧差商的极限不同，也可能是因为差商本身不存在极限. 讨论分段点处的可导性时，应优先检查函数在该点的连续性，再分别计算左、右导数.

以下九个样例与前九章一一对应. 每个样例都给出 MATLAB 与 MWORKS.Syslab 的计算步骤，并用同一数学结论核对结果.

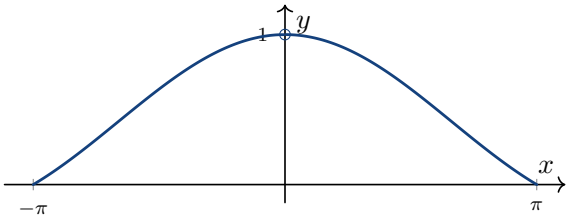
10.4.1 函数与极限

考察 x 从两侧趋于零时 $\sin x/x$ 的变化. 用两列取样值区分左侧和右侧，再用图观察两个分支.

MATLAB

```
format long g
h = 10.^(-(1:5)');
left = sin(-h)./(-h);
right = sin(h)./h;
disp([h left right]);
x = linspace(0.02,pi,250);
figure; plot(-x,sin(x)./x,'b',x,sin(x)./x,'b');
hold on; plot(0,1,'ko'); xlabel('x'); ylabel('sin(x)/x');
```

第一列是与原点的距离，第二、三列分别对应 $-h$ 和 h. 两列相同是因为该函数为偶函数. 图中的空心点表示原式在零点无定义. 样本支持极限为 1 的判断，极限的证明见第一章.



零点两侧的取样曲线与未取到的极限点

MWORKS.Syslab（Julia）

三列依次是步长、左侧样本和右侧样本.Julia 用 `sin.` 对数组中的每个元素取正弦.

```
h = 10.0 .^ (-(1:5))
println(hcat(h, sin.(-h)./(-h), sin.(h)./h))
```